Surjectivité de l'exponentielle de matrice

Lemme 1. *Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.*

Démonstration.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Étape 1 : Montrons que $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

($\subseteq$) On a $\mathbb{C}[A]^\times \subseteq \mathbb{C}[A]$, et pour tout $M \in \mathbb{C}[A]^\times$, il existe $N \in \mathbb{C}[A]$ telle que $MN = I_n$, donc $M \in GL_n(\mathbb{C})$.
Finalement, $\mathbb{C}[A]^\times \subseteq \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

($\supseteq$) Soit $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. On considère son polynôme caractéristique $\chi_M = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$.
Comme $M \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $a_0 = \det M \neq 0$, et, par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_M(M) = 0$.

$$\chi_M(M) = \sum_{i=0}^{n} a_i M^i = 0 \Leftrightarrow M\left(\sum_{i=1}^{n} a_i M^{i-1}\right) = -a_0 I_n \Leftrightarrow M\left(-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n} a_i M^{i-1}\right) = I_n$$

Ainsi, comme $M \in \mathbb{C}[A]$, on a $-\frac{1}{a_0}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i M^{i-1} \in \mathbb{C}[A]$, donc $M \in \mathbb{C}[A]^\times$.

Étape 2 : Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A]) \subseteq \mathbb{C}[A]^\times$.
Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$, on a donc $M \in GL_n(\mathbb{C})$, et il existe $N \in C[A]$ tel que $M = \exp(N)$.
Il reste donc à prouver que $\exp(N)$ est un polynôme en A.
L'ensemble $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc $\mathbb{C}[A]$ est fermé.
De plus, pour tout entier n, $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{N^i}{i!} \in \mathbb{C}[A]$.
On en conclut par passage à la limite que $\exp(N) \in \mathbb{C}[A]$.

Étape 3 : Montrons que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe.
Soient M_1 et M_2 dans $\mathbb{C}[A]^\times$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $M(z) = zM_1 + (1-z)M_2 \in \mathbb{C}[A]$, et $P(z) = \det(M(z)) \in \mathbb{C}$.
On cherche un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ continu, avec $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$, et tel que $P \circ \gamma$ reste dans $\mathbb{C}^\times$.
Or le polynôme P n'est pas nul ($P(0) \neq 0$), donc P ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Notons Z l'ensemble de ses racines. Comme $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs, puisqu'on a enlevé un nombre fini de points, il existe un chemin γ qui évite les points de Z. Ainsi, il existe un chemin continu qui relie M_1 et M_2 dans $GL_n(\mathbb{C})$.
Donc $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs, donc connexe.

Étape 4 : Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$.
On applique le théorème d'inversion locale à $\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]^\times$: comme $d_0 \exp = Id$ est inversible, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ et un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de I_n dans $\mathbb{C}[A]^\times$, tels que exp soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. En particulier, $\exp(\mathbb{C}[A])$ contient un voisinage de I_n.
Soit maintenant $M \in \mathbb{C}[A]$. On pose $\mathcal{V}_M = \left\{V\exp(M) \,\middle|\, V \in \mathcal{V}\right\}$.
On a $\exp(M) \in \mathcal{V}_M$, et $\mathcal{V}_M$ est ouvert car $\mathcal{V}$ l'est et $\exp(M)$ est inversible.
De plus, pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $V = \exp(U)$, d'où :

$$V\exp(M) = \exp(U)\exp(M) = \exp(U+M) \in \exp(\mathbb{C}[A])$$

Ainsi, $\mathcal{V}_M$ est un voisinage ouvert de $\exp(M)$, donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$.

Étape 5 : Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$.
On va montrer que $E = \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$.
Pour cela, montrons que :

$$E = \bigcup_{M \in E} M \exp(\mathbb{C}[A])$$

($\subseteq$) Soit $M \in E$, on a $M = M\exp(0) \in \bigcup_{M\in E} M\exp(\mathbb{C}[A])$.

($\supseteq$) Soient $M \in E$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Si $N = M\exp(P(A))$, alors $M = N\exp(-P(A))$.
Ainsi, si $N \in \exp(\mathbb{C}[A])$, on aura aussi $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$, ce qui est exclu, car $M \in E$.
On a donc que $N \notin \exp(\mathbb{C}[A])$, donc $N \in E$.

Or, pour tout $M \in E$, on a $M\exp(\mathbb{C}[A])$ qui est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$, car M est inversible est que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert par l'étape précédente. Ainsi E est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$ comme réunion d'ouvert, donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

Étape 6 : Conclusion.
L'ensemble $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$ qui est connexe.
Or, $I_n = \exp(0)$ est dans $\exp(\mathbb{C}[A])$, qui est donc non vide. On en conclut que $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

□

Théorème 2. $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

Démonstration.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, on a donc $A \in \mathbb{C}[A]^\times$, donc par le lemme il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$.
On a donc bien un antécédent dans $M_n(\mathbb{C})$. □

Théorème 3. $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \left\{A^2 \;\middle|\; A \in GL_n(\mathbb{R})\right\}$

Démonstration.

($\subseteq$) Si $A \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$, on a $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \exp(B)$.
Alors $A = \exp\left(\frac{B}{2}\right)^2$, avec $\exp\left(\frac{B}{2}\right) \in GL_n(\mathbb{R})$.

($\supseteq$) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a donc $A \in \mathbb{C}[A]^\times$, et par le lemme il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$.
P est complexe, mais A est réelle, donc, en passant au conjugué, on a $A = \exp\left(\overline{P(A)}\right)$. On a alors :

$$A^2 = \exp(P(A))\exp\left(\overline{P(A)}\right) = \exp\left(P(A) + \overline{P(A)}\right) = \exp\left(\left(P + \overline{P}\right)(A)\right)$$

Or $P + \overline{P}$ est à coefficients réels, donc $\left(P + \overline{P}\right)(A)$ est dans $M_n(\mathbb{R})$.
Donc $\left(P + \overline{P}\right)(A)$ est un antécédent de A pour l'exponentielle.

□

Conclusion. $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ et $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to \left\{A^2 \;\middle|\; A \in GL_n(\mathbb{R})\right\}$ sont surjectives. ◁

Références

[Zav] Maxime Zavidovique. *Un max de math.* Calvage et Mounet